Tích phân trên hình chữ nhật, tích phân Riemann

Lê Đức Hưng

Bộ Môn Giải Tích, Khoa Toán-Tin Học, Trường ĐH KHTN, ĐHQG-HCM

Ngày 02 tháng 10 năm 2025

Nhắc lại: Hàm nhiều biến trong $\mathbb{R}^n$

Cho một tập không rỗng $D \subset \mathbb{R}^n$, ánh xạ

$$f : D \to \mathbb{R}$$
$$x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \mapsto f(x) = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

được gọi là một hàm số được xác định trên D. Ta gọi D là tập xác định, x là biến, và $f(x)$ là giá trị của f tại x. Nếu ta đặt $z = f(x)$ thì z là biến phụ thuộc vào x.

Đồ thị của hàm số f là tập hợp tất cả các điểm $(x_1, x_2, \ldots, x_n, z)$ trong không gian $\mathbb{R}^{n+1}$ sao cho $z = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$.

Một cách cụ thể, đồ thị của hàm số một biến là một đường cong trong mặt phẳng Oxy $\subset \mathbb{R}^2$.

Đồ thị của hàm số hai biến là một mặt cong trong không gian Oxyz $\subset \mathbb{R}^3$.

Giới thiệu tích phân

Trong chương này, ta nghiên cứu 'tích phân Riemann' trong không gian $\mathbb{R}^n$ với $n \in \mathbb{Z}^+$. Để đo kích thước của vật, ta dùng các khái niệm: chiều dài, diện tích, và thể tích.

Các khái niệm này - mà ta gọi chung là thể tích - như trong Hình học Euclid không được định nghĩa mà *được thừa nhận là tồn tại thỏa những tính chất*:

- thể tích của một hình là một *số thực không âm*,
- thể tích của hội của hai hình rời nhau thì bằng tổng thể tích của hai hình (*tính cộng*),
- thể tích *không thay đổi qua một phép dời hình*.

Nhắc lại một số cấu trúc

Nếu $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ thì chuẩn (chiều dài) của x là

$$\|x\| = \left(x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2\right)^{1/2}.$$

Nếu $y = (y_1, y_2, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^n$ thì khoảng cách giữa x và y là

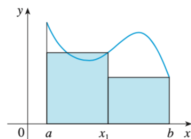
$$\|x - y\| = \left((x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + \cdots + (x_n - y_n)^2\right)^{1/2},$$

và tích trong giữa x và y là

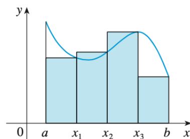
$$\langle x, y\rangle = x_1y_1 + x_2y_2 + \cdots + x_ny_n = \sum_{i=1}^{n} x_iy_i.$$

Nhắc lại tích phân trong $\mathbb{R}$

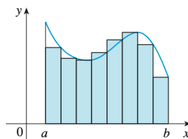
Đặt $I = [a, b]$ và $f : I \to \mathbb{R}^{\geq 0}$ liên tục. Ta muốn tính diện tích của vùng được bao bởi đồ thị hàm $f(x)$, trục Ox, và hai đường thẳng $x = a$, $x = b$ bằng cách tính tổng diện tích của những hình chữ nhật con; xem hình.



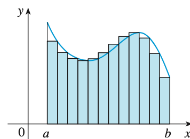
(a) $n = 2$



(b) $n = 4$



(c) $n = 8$



(d) $n = 12$

Ta chia nhỏ đoạn thẳng I bằng những đoạn thẳng con nhỏ hơn. Ta hy vọng rằng trên mỗi đoạn nhỏ hơn đó, giá trị của hàm f sẽ thay đổi ít hơn, và ta có thể xấp xỉ f bằng một hàm hằng.

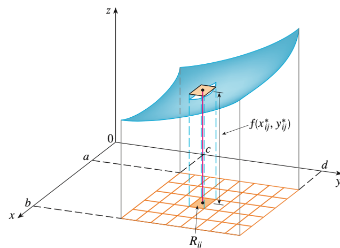
Nếu ta chia càng nhỏ thì xấp xỉ càng tốt hơn, và khi qua giới hạn thì ta sẽ được giá trị đúng của tổng giá trị của f. Khi đó, ta có khái niệm *tổng Riemann* và *tích phân xác định*:

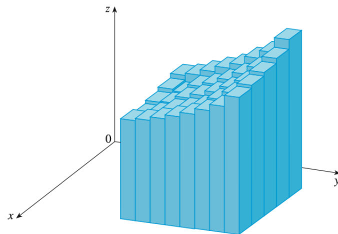
$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i^*)\Delta x.$$

Tích phân trên hình hộp

Ý tưởng: Tích phân trên không gian nhiều chiều là sự phát triển tương tự của tích phân một chiều. Để dễ hình dung, ta tưởng tượng như đang tính thể tích của một khối trong không gian 3 chiều, được bao bởi đồ thị mặt cong $f(x, y)$, mặt phẳng Oxy, và vùng cần tính tích phân I.

Ta sẽ chia thành những hình khối hộp với đáy là những hình chữ nhật con và chiều cao là giá trị của hàm số.





Hình hộp và thể tích của hình hộp

Một hình hộp n-chiều trong $\mathbb{R}^n$ là một tập con của $\mathbb{R}^n$ có dạng $[a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times \cdots \times [a_n, b_n]$ với $a_i < b_i$ với mọi $1 \leq i \leq n$, tức là tích của n đoạn thẳng.

Trong không gian 1 chiều, chiều dài của đoạn thẳng $[a, b]$ là gì?

$$|[a, b]| = b - a.$$

Trong không gian 2 chiều, diện tích của hình chữ nhật là gì?

$$|[a, b] \times [c, d]| = (b - a)(d - c).$$

Thể tích (volume) n-chiều của hình hộp $[a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times \cdots \times [a_n, b_n]$ được định nghĩa là số thực $(b_1 - a_1)(b_2 - a_2) \cdots (b_n - a_n)$.

Ta dùng ký hiệu $|I|$ để chỉ thể tích của I. Thể tích được tính theo cách này còn được gọi là độ đo Jordan (Jordan measure).

Trong $\mathbb{R}$, giải thích $|[a, b]| = b - a$

• Nếu $a = b$ thì đoạn $[a, b]$ chỉ gồm đúng một điểm. Khi đó, nếu chiều dài này là một số dương thì chiều dài của một đoạn như $[0, 1]$, gồm vô hạn điểm, không thể là một số thực xác định bởi tính cộng.

Do đó, chiều dài một điểm phải bằng 0.

• Đoạn $[a + c, b + c]$ là tịnh tiến của đoạn $[a, b]$ nên chiều dài không đổi, nghĩa là $|[a + c, b + c]| = |[a, b]|$.

• Với $n \in \mathbb{Z}^+$, đoạn thẳng $[0, na]$ gồm n đoạn thẳng $[0, a]$, $[a, 2a]$, $[2a, 3a]$, $\ldots$, $[(n - 1)a, na]$.

Vì chiều dài một điểm bằng 0 (đoạn $[a, a]$, $[2a, 2a]$, $\ldots$), nên tính cộng của chiều dài dẫn đến

$$|[0, na]| = n|[0, a]|.$$

(*Ở đây, đoạn* $[(n - 1)a, na]$ *là tịnh tiến của đoạn* $[0, a]$.).

• Từ $|[0, na]| = n|[0, a]|$, ta có

$$|[0, a]| = n\left|\left[0, \frac{1}{n}a\right]\right| \quad \text{hay} \quad \left|\left[0, \frac{1}{n}a\right]\right| = \frac{1}{n}|[0, a]|.$$

Do đó, với $m, n \in \mathbb{Z}^+$, ta có

$$\left|\left[0, \frac{m}{n}a\right]\right| = \frac{m}{n}|[0, a]|.$$

• Với trường hợp riêng $a = 1$ thì

$$\left|\left[0, \frac{m}{n}\right]\right| = \frac{m}{n}|[0, 1]|.$$

Vì vậy, với $a \in \mathbb{Q}^+$, thì $|[0, a]| = a|[0, 1]|$.

• Với a là *số vô tỉ* dương, ta có $b, c \in \mathbb{Q}^+$ sao cho $b < a < c$. Từ đây, ta có:

$$|[0,b]| = b|[0,1]| \leq |[0,a]| \leq |[0,c]| = c|[0,1]|,$$

nghĩa là

$$b \leq \frac{|[0,a]|}{|[0,1]|} \leq c.$$

Vì b và c gần a tùy ý, nên ta được $\frac{|[0,a]|}{|[0,1]|} = a$, và vì vậy, $|[0,a]| = a|[0,1]|$.

• Kết hợp hai trường hợp a hữu tỉ và vô tỉ, ta suy ra với hai số thực $a < b$ thì phải có

$$|[a, b]| = |[0, b-a]| = (b-a)|[0, 1]|,$$

nghĩa là chiều dài đoạn $[a, b]$ phải bằng $(b - a)$ nhân với chiều dài đoạn $[0, 1]$.

• Để chuẩn hóa, ta lấy $|[0, 1]| = 1$, nên $|[a, b]| = b - a$.

Giải thích trên chỉ ra nguồn gốc vấn đề là chiều dài cần có những tính chất như tính cộng và tính không thay đổi dưới phép dời hình.

Các tính chất đó dẫn tới *chiều dài phải được định nghĩa theo một cách duy nhất sai khác một cách chọn chiều dài đơn vị*, giống như việc chọn đơn vị đo trong vật lý.

Lý luận tương tự, diện tích của hình chữ nhật $[a, b] \times [c, d]$ phải bằng $(b-a)(d-c)$ nhân với diện tích của hình chữ nhật $[0, 1] \times [0, 1]$.

Ta chọn $|[0, 1] \times [0, 1]| = 1$ để được kết quả đơn giản: diện tích hình chữ nhật bằng chiều dài nhân với chiều rộng. $\square$

Chia nhỏ hình hộp

Một phép chia, hay một phân hoạch (partition) của một khoảng $[a, b]$ là một *tập con hữu hạn* của khoảng $[a, b]$ mà chứa cả a và b.

Ta có thể đặt tên các phần tử của một phép chia là x_0, x_1, ..., x_m với

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_m = b.$$

Mỗi khoảng $[x_{i-1}, x_i]$ là một khoảng con của khoảng $[a, b]$ tương ứng với phép chia.

Ví dụ: Trong $\mathbb{R}$, tập hợp các khoảng con

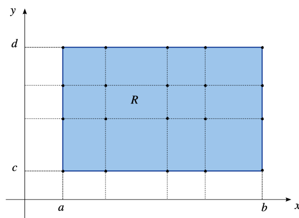
$$\left\{ \left[0, \frac{1}{5}\right], \left[\frac{1}{5}, \frac{1}{4}\right], \left[\frac{1}{4}, \frac{1}{3}\right], \left[\frac{1}{3}, \frac{1}{2}\right], \left[\frac{1}{2}, 1\right] \right\}$$

là một phép chia của khoảng $[0, 1]$.

Một phép chia của hình hộp $I = \prod_{i=1}^{n}[a_i, b_i]$ là một tích Descartes của các phép chia của các khoảng $[a_i, b_i]$. Cụ thể, nếu mỗi P_i là một phép chia của khoảng $[a_i, b_i]$ thì

$$P = \prod_{i=1}^{n} P_i$$

là một phép chia của hình hộp I.



Hình: Một phép chia của hình chữ nhật $[a, b] \times [c, d]$ gồm những điểm mà các tọa độ thứ nhất tạo thành một phép chia của $[a, b]$ và các tọa độ thứ hai tạo thành một phép chia của $[c, d]$.

Ví dụ

Trong $\mathbb{R}^2$, xét hình chữ nhật $[1,3]\times[2,5]$. Ta có phép chia của $[1,3]$ là

$$P_1 = \left\{1, \frac{3}{2}, 2, \frac{5}{2}, 3\right\},$$

và phép chia của $[2,5]$ là

$$P_2 = \{2,3,4,5\}.$$

Như vậy, phép chia $P = P_1 \times P_2$ sẽ là

$$\left\{\left[1,\frac{3}{2}\right]\times[2,3], \left[1,\frac{3}{2}\right]\times[3,4], \left[1,\frac{3}{2}\right]\times[4,5], \right.$$
$$\left. \left[\frac{3}{2},2\right]\times[2,3], \left[\frac{3}{2},2\right]\times[3,4], \left[\frac{3}{2},2\right]\times[4,5], \cdots\right\}$$

Một hình hộp con ứng với một phép chia P của một hình hộp I là một tích các khoảng con của các cạnh của hình hộp I.

Cụ thể, một hình hộp con của hình hộp I có dạng $\prod_{i=1}^{n} T_i$, trong đó T_i là một khoảng con của khoảng $[a_i, b_i]$ ứng với phép chia P_i.

Lưu ý, để cho đơn giản, xét trong $\mathbb{R}^2$, ta xem *phép chia* là các khoảng chia dọc theo hai trục Ox và Oy, trong khi *hình hộp con* là các hình chữ nhật (các ô chữ nhật) tạo bởi các khoảng chia.

Đặt $H(P)$ là tập hợp tất cả các hình hộp con ứng với phép chia P.

Tích phân trên hình hộp

Cho I là một hình hộp trong $\mathbb{R}^n$, và $f : I \to \mathbb{R}$. Với một phép chia P của I, thành lập tổng Riemann

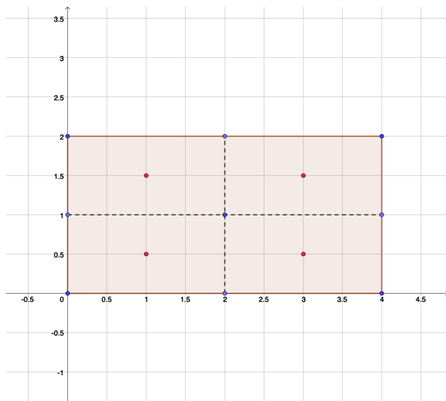
$$\sum_{R \in H(P)} f(x_R)|R|,$$

nghĩa là tổng trên tất cả các hình hộp con R của P bởi giá trị của f tại một điểm đại diện bất kỳ x_R trong R nhân với thể tích của R.

Ví dụ

Cho hàm $f(x, y) = x + 2y$ *trên hình chữ nhật* $[0, 4] \times [0, 2]$. *Chia đều hình chữ nhật này thành 4 phần bằng kích thước, cụ thể dùng các điểm chia tọa độ* $x_0 = 0$, $x_1 = 2$, $x_2 = 4$, $y_0 = 0$, $y_1 = 1$, $y_2 = 2$.

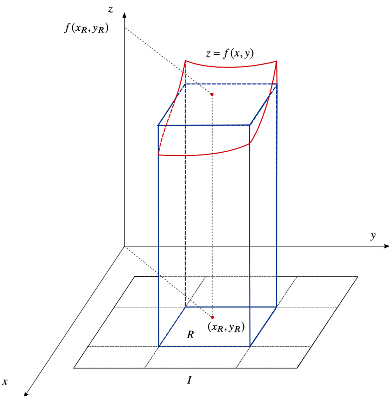
Lấy điểm đại diện trên mỗi hình chữ nhật con là điểm giữa của hình chữ nhật con. Tính tổng Riemann tương ứng.



Hình: Chia đều hình chữ nhật $[0,4] \times [0,2]$ thành 4 phần bằng kích thước và lấy điểm chính giữa hình chữ nhật con làm điểm đại diện.

Mỗi hình chữ nhật con có diện tích $|R| = 2 \cdot 1 = 2$, nên tổng Riemann là:

$$[f(1;0{,}5) + f(1;1{,}5) + f(3;0{,}5) + f(3;1{,}5)] \cdot 2 \cdot 1 = [2 + 4 + 4 + 6] \cdot 2 = 32.$$



"Giới hạn" của tổng Riemann khi phép chia "mịn hơn" là tích phân của hàm f trên I, ký hiệu là

$$\int_I f.$$

Nếu $f \geq 0$ thì tổng Riemann là một "xấp xỉ của thể tích" của khối bên dưới đồ thị của f và bên trên I; và $\int_I f$ đại diện cho "thể tích" của khối bên dưới đồ thị của f và bên trên I.

Một ý nghĩa khác là tổng Riemann là một "xấp xỉ của tổng giá trị" của f trên I, và $\int_I f$ đại diện cho "tổng giá trị" của hàm f trên I.

Giống như tích phân của hàm một biến, ban đầu tích phân có ý nghĩa chính là tính thể tích, nhưng về sau ý nghĩa tính tổng của tích phân nổi bật hơn và tổng quát hơn, như ta có thể thấy ở phần sau của môn học này.

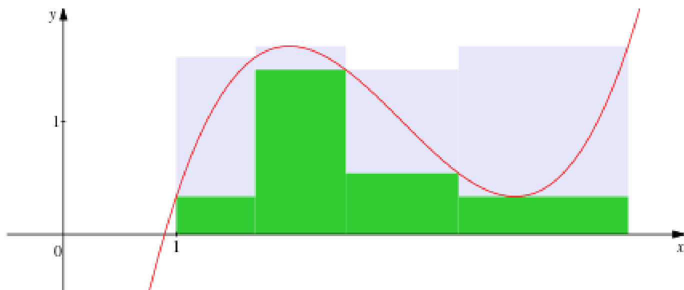
Thiết lập tổng Riemann

• Khi nói về tích phân Riemann, ta chỉ xét hàm bị chặn.

Ta dùng tích phân của hàm một biến để xét tích phân của hàm không bị chặn bằng cách lấy giới hạn của tích phân để thu được “tích phân suy rộng”, một khái niệm mà ta không khảo sát trong môn học này. Vậy, giả sử f bị chặn.

• Gọi $L(f,P) = \sum_{R\in H(P)} (\inf_R f)\,|R|$, trong đó tổng được lấy trên tất cả các hình hộp con ứng với phép chia P, là tổng dưới hay xấp xỉ dưới ứng với P.

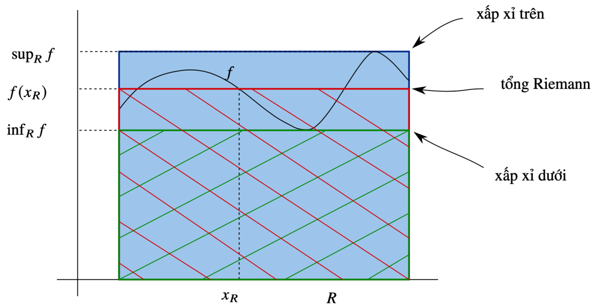
Tương tự, $U(f,P) = \sum_{R\in H(P)} (\sup_R f)\,|R|$ là tổng trên hay xấp xỉ trên ứng với P.



Hình: Xấp xỉ dưới và xấp xỉ trên với 4 hình hộp con.

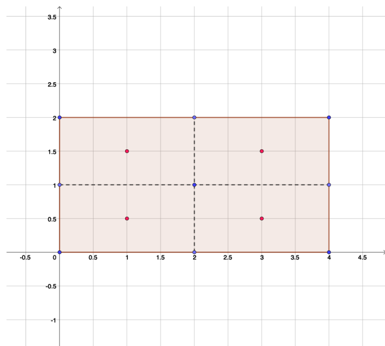
Theo định nghĩa, ta dễ dàng thấy với một phép chia P thì

$$L(f,P) \leq \sum_{R \in H(P)} f(x_R)|R| \leq U(f,P).$$



Hình: Xấp xỉ dưới $L(f,P) \leq$ xấp xỉ Riemann $\leq$ xấp xỉ trên $U(f,P)$.

Ví dụ



Hình: Chia đều hình chữ nhật $[0, 4] \times [0, 2]$ thành 4 phần bằng kích thước và lấy điểm chính giữa hình chữ nhật con làm điểm đại diện.

Ta vẫn xét hàm $f(x, y) = x+2y$ trên miền $[0, 4] \times [0, 2]$. Giá trị của hàm tăng theo x và tăng theo y, nên

- inf trên mỗi hình chữ nhật con xảy ra ở đỉnh dưới bên trái;
- sup trên mỗi hình chữ nhật con xảy ra ở đỉnh trên bên phải.

Ta tính được:

$$
\begin{aligned}
&L(f, P) \\
&= [f(0, 0) + f(2, 0) + f(0, 1) + f(2, 1)] \cdot 2 \cdot 1 \\
&= 16, \\
&U(f, P) \\
&= [f(2, 1) + f(4, 1) + f(2, 2) + f(4, 2)] \cdot 2 \cdot 1 \\
&= 48.
\end{aligned}
$$

Định nghĩa

Cho $P = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ là một phép chia của đoạn $[a, b]$. Cho $c \in [x_{i-1}, x_i]$. Gọi P' là một phép chia từ P bằng cách thêm c vào P để thu được

$$P' = \{x_0, x_1, \ldots, x_{i-1}, c, x_i, \ldots, x_n\}.$$

Ta nói phép chia P' mịn hơn (refinement) phép chia P. Ngoài ra, nếu Q là một tập hữu hạn sao cho

$$P \subset Q \subset [a, b],$$

thì phép chia Q cũng được gọi là mịn hơn phép chia P.

Bổ đề (Chia mịn hơn thì tổng dưới tăng và tổng trên giảm)

Nếu phép chia P' là mịn hơn phép chia P thì $L(f, P') \geq L(f, P)$ và $U(f, P') \leq U(f, P)$.